Prof. Dr. Alfred Toth

Die quantitativ-qualitative Arithmetik der Peirce-Zahlen

1. Es gilt (vgl. z.B. Bense 1967, S. 9)

ZR = {M, O, I}.

Da man über jeder Menge ihre Potenzmenge bilden kann, bekommen wir

$\wp$ZR = {{M}, {O}, {I}, {M, O}, {O, I}, {M, I}, {M, O, I}, ∅},

weshalb wir definieren können

ZR+ = {M, O, I, ∅}.

2. Da nach Bense (1979, S. 67)

ZR(td) = (1. → 2. → 3.) ≡ (1 ⊂ 2 ⊂ 3) bzw.
ZR(td, ∅) = (0. → 1. → 2. → 3.) ≡ (O ⊂ 1 ⊂ 2 ⊂ 3)

und z.B. nach Walther (1979, S. 79) gilt

ZR(tt) = (.1 ≤ .2 ≤ .3) ≡ (.1 ⊆ .2 ⊆ .3) bzw.
ZR(tt, ∅) = (.0 ≤ .1 ≤ .2 ≤ .3) ≡ (.0 ⊆ .1 ⊆ .2 ⊆ .3),

haben wir zwei semiotische Zahlensysteme, die wir Peirce-Zahlen nennen, bzw. ein semiotisches Zahlensystem mit zwei Ordnungstypen

td$\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ = ({1, 2, 3}; ⊂) bzw. td$\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \cup 0$ = ({0, 1, 2, 3}; ⊂) bzw.
tt$\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ = ({1, 2, 3}; ⊆) bzw. tt$\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \cup 0$ = ({0, 1, 2, 3}; ⊆).

3. Nach Beckmann ap. Walther (1979, S. 135 ff.) gelten sowohl für td$\mathbb{P}$ als auch für tt$\mathbb{P}$ die verbandstheoretischen (Booleschen) Operationen: ⊓, ⊔, ⊏, ⊐, =:

$0 \sqcap 0 = 0, 1 \sqcap 1 = 1, 2 \sqcap 2 = 2, 3 \sqcap 3 = 3$

$0 \sqcap 2 = 0 = 2 \sqcap 0$

$1 \sqcap 2 = 1 = 2 \sqcap 1$

$1 \sqcap 3 = 1 = 3 \sqcap 1$

$0 \sqcup 0 = 0,\ 1 \sqcup 1 = 1,\ 2 \sqcup 2 = 2,\ 3 \sqcup 3 = 3$

$0 \sqcup 2 = 0 = 2 \sqcup 0$

$1 \sqcup 2 = 2 = 2 \sqcup 1$

$1 \sqcup 3 = 3 = 3 \sqcup 1$

Damit kann man die beiden Peirce-Zahlen wie folgt notieren:

$\mathrm{Td}\mathbb{P} = (0 \sqsubset 1 \sqsubset 2 \sqsubset 3)$ bzw. $\times(\mathrm{Td}\mathbb{P}) = (3 \sqsupset 2 \sqsupset 1 \sqsupset 0)$

$\mathrm{Tt}\mathbb{P} = (0 \sqsubset 1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq 3)$ bzw. $\times(\mathrm{Tt}\mathbb{P}) = (3 \sqsupseteq 2 \sqsupseteq 1 \sqsupseteq 0)$

Ferner gelten nach Bense (ap. Walther 1979, S. 57) die beiden qualitativen Operatoren

$\Rsh,\ |\Rsh,$

nämlich

$\mathrm{td}\mathbb{P} = (0 \Rsh 1 \Rsh 2 \Rsh 3)$

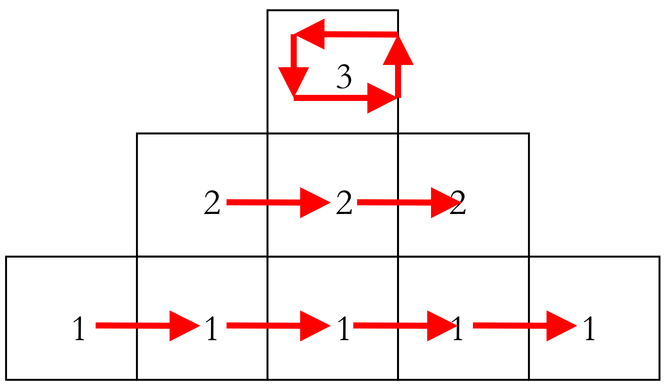
$$\mathrm{tt}\mathbb{P} = \begin{cases} 0 \,\|\, 0 \,/\, 0 \Rsh 1 \,/\, 0 \Rsh 2 \,/\, 0 \Rsh 3 \\ 1 \,\|\, 1 \,/\, 1 \Rsh 2 \,/\, 1 \Rsh\Rsh 3 \\ 2 \,\|\, 2 \,/\, 2 \Rsh 3 \\ 3 \,\|\, 3, \end{cases}$$

so dass wir also die Ordnungsstruktur in 2. wie folgt ergänzen können:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{td}\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \cup 0 = (\{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{N} \cup 0; \subset, \Rsh) \\ &\mathrm{tt}\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \cup 0 = (\{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{N} \cup 0; \subseteq, |\Rsh) \end{aligned}}$$

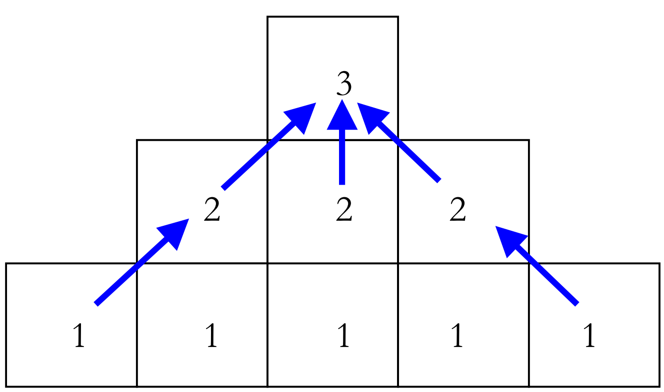
4. Die hier kurz skizzierte quantitativ-qualitative Peirce-Zahlen-Arithmetik kann man gut mit Hilfe des in Toth (2009) eingeführten Treppenmodells, eines flächigen Zahlenschemas, darstellen. Für beschränken uns hier auf ZR, da ZR+ leicht selbst gezeichent werden kann. Z.B entspricht die rot ausgezogene Zählrichtung den folgenden Additionen:

M + M = ?　　　1 + 1 = ?
O + O = ?　　　2 + 2 = ?
I + I = ?　　　3 + 3 = ?
M + M + M = ?　　　1 + 1 + 1 = ?



Blau ausgezogen sind im folgenden die Operationen mit Kontexturüberschreitungen, d.h. sobald die 2. Dimension des Treppenschemas benutzt werden muss:

M + O = ?　　　1 + 2 = ?
O + I = ?　　　2 + 3 = ?



Bibliographie

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967
Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979
Toth, Alfred, Semiotische Limeszahlen In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, (erscheint, 2009)
Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aifl. 1979

2.11.2009